Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 13

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 6. Februar 2020, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 13.1 *Beweismechanikaufgabe* (4 Punkte)

Bitte gehen Sie in dieser Aufgabe nach den Regeln der Beweismechanik vor und geben Ihre Lösung auf einem separaten Blatt in den Briefkasten mit der Aufschrift „Beweismechanikaufgaben“ ab. Ihnen unbekannte Begriffe und Symbole können Sie in der Beweismechanik nachschlagen.

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $U, W \subset V$ Unterräume. Zeigen Sie

- (i) $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$
- (ii) $U^\circ + W^\circ \subset (U \cap W)^\circ$.

Hinweis: Es gilt auch $(U \cap W)^\circ \subset U^\circ + W^\circ$. Dies müssen Sie jedoch hier nicht beweisen.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ und W der durch die Vektoren

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \alpha_2 &= e_2 + 3e_3 + 3e_4 + e_5 \\ \alpha_3 &= e_1 + 4e_2 + 6e_3 + 4e_4 + e_5\end{aligned}$$

aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^5$. Finden Sie eine Basis für W^0 .

Definition

In der Linearen Algebra II wird unter anderem die sogenannte *Determinante* behandelt. Diese ist eine Abbildung, die jeder Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ ein Element $\det(A) \in K$ zuordnet. Es kann z.B. gezeigt werden, dass eine Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Wir geben explizite Formeln für die Determinante im Falle $n = 2$ und $n = 3$ an. Verwenden Sie diese zur Lösung von Aufgabe 13.3 und Aufgabe 13.4.

- Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(K)$ gilt $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(M)$ gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(K)$.

- (a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist wenn $\det(A) \neq 0$.
- (b) Sei A invertierbar. Finden Sie eine allgemeine Formel für die Inverse von A

Aufgabe 13.4*(4 Punkte)*

Sei K ein Körper und sei $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(K)$. Sei $B \in \text{Mat}_{3 \times 3}(K)$ eine Matrix, die aus A durch eine elementare Zeilenumformung von Typ 1 hervorgeht, und entsprechend $C, D \in \text{Mat}_{3 \times 3}(K)$ für Typ 2, bzw. Typ 3. Zeigen Sie:

- (a) $\det B = -\det(A)$
- (b) $\det C = \lambda \det(A)$, wobei λ den Skalar bezeichnet, mit dem wir eine Zeile von A multipliziert haben.
- (c) $\det D = \det(A)$

Hinweis: wenn man die i -te Zeile von A betrachtet, kann man die andere zwei als $i + 1$ und $i + 2$ nummerieren mit der Konvention, dass

- für $i = 1$ sind $i + 1 = 2$ und $i + 2 = 3$ (wie erwartet);
- für $i = 2$ sind $i + 1 = 3$ und $i + 2 = 1$;
- für $i = 3$ sind $i + 1 = 1$ und $i + 2 = 2$.